Matemáticas aplicadas a las Ciencias sociales 1

Examen de pendientes de cursos anteriores. 2º parcial.

1. Dibuja la gráfica de la siguiente función indicando claramente los puntos de corte con los ejes y el vértice de la parábola: $f(x)=\begin{cases} 2x+5 & si\ x<0 \\ |x^2-6x+5| & si\ x\geq 0 \end{cases}$

2. Halla el dominio de las siguientes funciones, estudia su continuidad y calcula la ecuación de sus asíntotas.
$f(x)=\dfrac{4-x^2}{x^2+x-6}$

3. Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$ y $g(x)=\dfrac{3x+2}{1-x}$ halla:
   a. $f \circ g$
   b. g^{-1}

4. Dada la función $f(x)=\dfrac{x-\sqrt{x^2-2x+2}}{x-1}$, calcula el valor de su límite cuando
   a. x tiende a infinito. (0,75 puntos)
   b. x tiende a 2. (0,5 puntos)
   c. x tiende a 1. (0,75 puntos)

5. El número de habitantes de una determinada ciudad ha evolucionado de acuerdo con los datos reflejados en la siguiente tabla:

Año	1995	2001	2007
Población (miles de habitantes)	23	27	33

   a. Estima mediante interpolación cuadrática la población en 2003.
   b. ¿Cúal será la población estimada en 2012?

6. Para estudiar la relación entre llos gastos de publicidad de seis empresas de productos lácteos y las ventas realizadas durante un periodo de tiempo, disponemos de los siguientes datos:

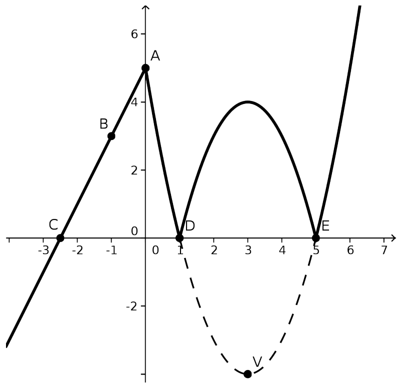
Gastos (miles €)	1	2	3	4	5	6
Ventas	12	14	14	15	18	16

   a. Halla las medias y las desviaciones típicas de las variables X e Y.
   b. Calcula la covarianza y el coeficiente de correlación.
   c. Determina la ecuación de la recta de regresión de Y sobre X.
   d. Estima el valor que se puede esperar para un gasto de 8 mil euros.

7. El tiempo de hospitalización en una determinada zona sanitaria sigue una distribución normal de media 7 días y desviación típica 3 días.
   a. ¿Cuál es la probabilidad de que un enfermo esté menos de 5 días en el hospital?
   b. ¿Qué porcentaje de enfermos está hospitalizado menos de 8 días?

Resolución

1. $f(x)=\begin{cases} 2x+5 & si\ x<0 \\ |x^2-6x+5| & si\ x\geq 0 \end{cases}$



Es una gráfica en dos trozos.
El primero, y = 2x + 5, es una semirrecta que sale del punto A=(0, 5) (sin llegarlo a tocar) y pasa por B=(-1,3).
Corta al eje X si 0 = 2x + 5 → x = -5/2 C=(-2'5, 0).
El segundo trozo, y = $|x^2 - 6x + 5|$, es una parábola a la que se ha aplicado el valor absoluto, convirtiendo todos sus valores en positivo.
Su vértice está en V_x = -b/2a = 6/2 = 3 → V=(3, -4)
Corta al eje Y si x = 0 A=(0, 5)
Corta al eje X si y = 0 0 = $x^2 - 6x + 5$ → x=1, x=5
D=(1, 0) E=(5,0)

2. $f(x)=\dfrac{4-x^2}{x^2+x-6}$

Dominio: No puede ser que el denominador sea 0.

$$x^2+x-6=0 \rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2} \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-3 \end{cases} \qquad \text{Dominio} = \mathbb{R}-\{-3,2\}$$

Estudiamos x = -3

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -3^-}\dfrac{4-x^2}{x^2+x-6}=\lim\limits_{x\to -3^-}\dfrac{4-x^2}{(x+3)(x-2)}=\dfrac{-5}{+0}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{4-x^2}{x^2+x-6}=\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{4-x^2}{(x+3)(x-2)}=\dfrac{-5}{-0}=+\infty \\ f(-3)\ \text{no existe} \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} \text{Discontinuidad de salto infinito en x = -3} \\ \text{Asíntota vertical de ecuación x = -3} \end{cases}$$

Estudiamos x = 2

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{4-x^2}{x^2+x-6}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-(x+2)(x-2)}{(x+3)(x-2)}=\dfrac{-4}{5} \\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{4-x^2}{x^2+x-6}=\dfrac{-4}{5} \\ f(2)\ \text{no existe} \end{array}\right\} \rightarrow \{\text{Discontinuidad evitable en x = 2}$$

Estudiamos $x\rightarrow\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4-x^2}{x^2+x-6}=\frac{-\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2}{x^2}=-1 \qquad \rightarrow \text{Asíntota horizontal de ecuación y = 1}$$

3. $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$ $\qquad g(x)=\dfrac{3x+2}{1-x}$

a. $$f\circ g=f(g(x))=f\left(\frac{3x+2}{1-x}\right)=\frac{2}{\dfrac{3x+2}{1-x}-1}=\frac{2}{\dfrac{3x+2-1+x}{1-x}}=\frac{1-x}{4x+1}$$

b. $$\frac{3x+2}{1-x}=y \;\rightarrow\; 3x+2=y-yx \;\rightarrow\; 3x+yx=y-2 \;\rightarrow\; (3-y)x=y-2 \;\rightarrow$$

$$x=\frac{y-2}{3-y} \;\rightarrow\; g^{-1}(x)=\frac{x-2}{3-x}$$

4. Dada la función $f(x)=\frac{x-\sqrt{x^2-2x+2}}{x-1}$, calcula el valor de su límite cuando

   a. $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sqrt{x^2-2x+2}}{x-1}=\frac{\infty-\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sqrt{x^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{0}{x}=0$

   b. $\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{x^2-2x+2}}{x-1}=\frac{2-\sqrt{2}}{2-1}=2-\sqrt{2}$

   c.
$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x^2-2x+2}}{x-1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-2x+2}\right)\cdot\left(x+\sqrt{x^2-2x+2}\right)}{(x-1)\cdot\left(x+\sqrt{x^2-2x+2}\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-\left(x^2-2x+2\right)}{(x-1)\cdot\left(x+\sqrt{x^2-2x+2}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x-2}{(x-1)\cdot\left(x+\sqrt{x^2-2x+2}\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{(x-1)\cdot\left(x+\sqrt{x^2-2x+2}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{2}{x+\sqrt{x^2-2x+2}}=\frac{2}{1+\sqrt{1}}=1$$

5. Si suponemos que 1995 es el año en que empezamos a contar, podemos sustituirlo por 0. Así, 2001 será el año 6 (=2001-1995), y 2007 el año 12. De esta forma los cálculos serán más sencillos.

Año	0	6	12
Población (miles de habitantes)	23	27	33

El polinomio interpolador será $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$.

$f(0)=23\rightarrow a\cdot 0^2+b\cdot 0+c=23\rightarrow c=23$

$f(6)=27\rightarrow a\cdot 6^2+b\cdot 6+23=27\rightarrow 36a+6b=4$

$f(12)=33\rightarrow a\cdot 12^2+b\cdot 12+23=33\rightarrow 144a+12b=10$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (por reducción, por ejemplo):

$$\begin{cases}36a+6b=4\\144a+12b=10\end{cases}\rightarrow\begin{cases}36a+6b=4\\-72a-6b=-5\\\hline -36a\qquad=-1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}-144a-24b=-16\\144a+12b=10\\\hline \qquad -12b=-6\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{36}\\b=\frac{1}{2}\end{cases}$$

de donde $f(x)=\frac{1}{36}x^2+\frac{1}{2}x+23$

   a. El año 2003 corresponde a x = 8 (=2003 – 1995), de donde

      $f(8)=\frac{1}{36}\cdot 8^2+\frac{1}{2}\cdot 8+23=28,\overline{7}$ es decir, 28778 habitantes.

   b. En 2012, x = 17, de donde

      $f(8)=\frac{1}{36}\cdot 17^2+\frac{1}{2}\cdot 17+23=39,52\overline{7}$ es decir, 39.528 habitantes.

Matemáticas aplicadas a las Ciencias sociales 1

Examen de pendientes de cursos anteriores. 2º parcial.

1. Dibuja la gráfica de la siguiente función indicando claramente los puntos de corte con los ejes y el vértice de la parábola: $f(x)=\begin{cases} -x^2-x+6 & \text{si } x<2 \\ \dfrac{x-2}{2} & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$ (2 puntos)

2. Halla el dominio de la siguiente función, estudia su continuidad y calcula la ecuación de sus asíntotas.
   $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2-x-12}$ (2 puntos)

3. Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{x}{2x+1}$ y $g(x)=\dfrac{x-3}{3-2x}$ halla:
   a. $f\circ g$ (1 punto)
   b. f^{-1} (1 punto)

4. Dada la función $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$, calcula el valor de su límite cuando
   a. x tiende a infinito. (0,75 puntos)
   b. x tiende a 2. (0,75 puntos)
   c. x tiende a 1. (0,5 puntos)

5. El número de fotocopias realizadas en una oficina viene dado por los siguientes datos durante los tres primeros meses del año:

Mes	Enero	Febrero	Marzo
Nº de fotocopias	1100	1500	1550

   a. Obtén el polinomio interpolador que determina el nº de fotocopias al mes.(0,75 puntos)
   b. Deduce el nº de fotocopias que se realizarán en abril. (0,5 puntos)
   c. ¿Sirve el polinomio para calcular el nº de fotocopias de octubre? Razona la respuesta. (0,5 puntos)

6. En una Comunidad Autónoma la evolución del índice de precios al consumo y de la tasa de inflación acumulada en los primeros 6 meses del año es la que se muestra en la tabla:

IPC = X	0,6	0,9	1,1	0,8	1,2	0,8
TIA = Y	3,6	3,8	4	3,9	4,1	4

   a. Halla las medias y las desviaciones típicas de las variables X e Y. (0,5 puntos)
   b. Calcula la covarianza y el coeficiente de correlación. (0,5 puntos)
   c. Determina la ecuación de la recta de regresión de Y sobre X. (0,5 puntos)
   d. Estima el valor de la TIA que se puede esperar para un IPC de 1,5.(0,5 puntos)

7. El contenido teórico de cierto jarabe es de 125 cm^3. Si suponemos que el contenido de los frascos de jarabe sigue una distribución normal de desviación típica 8 cm^3 :
   a. ¿Cuál es la probabilidad de que un frasco tenga menos de 135 cm^3? (1 punto)
   b. ¿Qué porcentaje de frascos tiene entre 115 y 135 cm^3? (1 punto)

Fórmulas de estadística.

Media $\bar{x}=\frac{\sum x_i}{N}$ $\bar{y}=\frac{\sum y_i}{N}$ Desviación típica $\sigma_x=\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N}-\bar{x}^2}$ $\sigma_y=\sqrt{\frac{\sum y_i^2}{N}-\bar{y}^2}$

Covarianza $\sigma_{xy}=\frac{\sum x_i \cdot y_i}{N}-\bar{x}\cdot\bar{y}$

Coeficiente de correlación $r=\frac{\sigma_x \cdot \sigma_y}{\sigma_{xy}}$

Recta de regresión $y-\bar{y}=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}\cdot(x-\bar{x})$

Tabla de la distribución normal N(0,1)

Para valores entre 1,0 y 1,59

	0	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441