Logaritmos. Ecuaciones logarítmicas

Concepto: Aunque se escribe de forma un tanto complicada, un logaritmo es simplemente un exponente (es decir, un número que puede usarse como exponente).

El cálculo logaritmos y el cálculo de raíces son las dos operaciones inversas de la potenciación en el siguiente sentido:

- Potenciación: conociendo la base (2) y el exponente (5), se trata de calcular la potencia. $2^5 = 2·2·2·2·2=32$
- Radicación: conociendo el exponente (5) y la potencia (32), se trata de encontrar la base. $\sqrt[5]{32}=2$
- Logaritmo: conociendo la base (2) y la potencia (32), se trata de encontrar el exponente. $\log_2 32=5$

En resumen, cuando nos dan un logaritmo nos proporcionan una base (escrita como un subíndice al lado de la palabra "log") y una potencia ya calculada (a la derecha de "log", entre paréntesis si hay más operaciones que puedan causar confusión). Lo que debemos encontrar es el exponente que corresponde a la base para que dé como resultado esa potencia.

Ejemplos: $\log_3 81$ → 3 es la base. 81 es la potencia. Hay que encontrar el exponente que corresponda a la potencia de 3 que dé por resultado 81. Como las potencias de 3 son $3^0=1$, $3^1=3$, $3^2=9$, $3^3=27$, $3^4=81$, entonces tenemos $\log_3 81=4$

$\log_5 125=3$ $\log_2\left(\frac{1}{4}\right)=-2$ $\log_4 16=\frac{1}{2}$ (recuerda los exponentes negativos o fraccionarios).

Lo importante es que se pueden calcular logaritmos de cualquier número en cualquier base positiva, aunque las potencias no sean exactas. El resultado, obtenido con la tecla "log" de la calculadora (antes se usaban tablas de logaritmos ya calculados), suele dar un número irracional que podemos aproximar redondeando con los decimales adecuados. Eso permite escribir cualquier número como potencia de una base adecuada, facilitando muchos cálculos. Para eso se inventaron. En particular, los logaritmos de base 10 permiten escribir todos los números como potencias de 10.

Por ejemplo: 1758 se puede escribir como potencia de 10: $1758=10^{\log_{10}1758}\approx 10^{3,245}$, pues $\log_{10} 1758=3,24501887....$
Calcular la raíz cúbica de 1758 sería $\sqrt[3]{1758}=\sqrt[3]{10^{3,245}}=10^{3,245\div 3}=10^{1,082}$

Definición: $\boxed{\log_a x=y \iff a^y=x}$ Siempre se toman *a* y *x* positivos; *y* puede ser cualquier número.

Observaciones:

Si $a=10$ no hace falta escribirlo, porque es la base más usual. $\log x=y \iff 10^y=x$

Si $a=e=2,718281....$, otra base usual en matemáticas, tampoco se escribe, pero se sustituye la palabra "log" por "ln" (**l**ogaritmo **n**eperiano) o por "L". $\ln x=y \Leftrightarrow e^x=y$ El nombre viene de Neper (J. Napier, 1550-1617), matemático escocés inventor de los logaritmos (a la vez que J. Bürgi, 1552-1632) como método para facilitar cálculos complicados.

Propiedades: Son equivalentes a las propiedades de las potencias, escritas de otra forma.

1. $\log_a 1=0$ porque, sea cual sea el número positivo *a*, se tiene que $a^0=1$
2. $\log_a a=1$ porque $a^1=a$. En general, $\log_a(a^n)=n$
3. $\log_a x+\log_a y=\log_a(x\cdot y)$ (La suma de exponentes corresponde al producto de las potencias si tienen la misma base)
4. $\log_a x-\log_a y=\log_a(\frac{x}{y})$ (La resta de exponentes corresponde a la división)
5. $n\log_a x=\log_a(x^n)$ (Se sobrentiende que $n\log_a x=n\cdot\log_a(x)$, y un producto de exponentes corresponde a una potencia de una potencia)
6. $\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}$ (Fórmula para cambiar la base de un logaritmo. En particular, $\log_a x=\frac{\log x}{\log a}$ permite usar calculadoras que solo tienen la tecla "log" , logaritmo decimal, para calcular logaritmos en cualquier base)

Ejercicios típicos

1. **Cálculo de logaritmos sin calculadora:** Se trata de usar la definición para pasar a forma de potencia. Al descomponer las bases en factores primos, se pueden usar las propiedades de potencias para igualar los exponentes.

Ejemplo 1: Calcula $\log_{25} 125$

Respuesta: $\log_{25} 125 = x \rightarrow 25^x = 125 \rightarrow (5^2)^x = 5^3 \rightarrow 2x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{2} \rightarrow \log_{25} 125 = \frac{3}{2}$

Ejercicio 1: Utilizando la definición de logaritmo, calcula **x** en cada uno de los siguientes casos.

a) log 0,0001 = x b) $\log_{\sqrt{2}} 16 = x$ c) $\log_2 x = 5$ d) $\log_x 27 = -3$

2. **Escribir unos logaritmos en función de otros:** Se usan las propiedades de los logaritmos para juntar o desagregar los elementos que hay dentro de ellos, dejando solos los logaritmos conocidos.

Ejemplo 2.1: Calcula $\log(96) + \log(6) - 2\log(12)$ en función del logaritmo de 2

Respuesta: $\log(96) + \log(6) - 2\log(12) = \log(96 \cdot 6) - \log(12^2) = \log\left(\frac{576}{144}\right) = \log 4 = \log 2^2 = 2\log 2$

Ejemplo 2.2: Calcula $\log_3(5x^2) - \log_9 x$ en función del $\log_3 x$.

Respuesta: $\log_3(27x^2) - \log_9 x = \log_3 27 + \log_3 x^2 - \frac{\log_3 x}{\log_3 9} = 3 + 2\log_3 x - \frac{\log_3 x}{2} = \frac{6 - 3\log_3 x}{2}$

Ejercicio2: Sabiendo que $\log_2 A = 0{,}8$, calcula: a) $\log_2(8A) - \log_2(A^3)$ b) $\log_{16} A$

3. **Ecuaciones logarítmicas:** Son ecuaciones que tienen la incógnita dentro de logaritmos. Se usan las propiedades para juntar todos los logaritmos en uno solo en cada término, es decir, dejando un único logaritmo a cada lado del símbolo “=”. (Si hay números sueltos, siempre se pueden escribir como logaritmos usando la propiedad 2). Entonces, ya que las bases son las mismas y los exponentes (los logaritmos) iguales, se iguala lo que hay dentro de los logaritmos (las potencias, porque también deben ser iguales) quitando directamente “$\log_a$”.
Solo valen las soluciones que mantengan positivo lo que hay dentro de los logaritmos del enunciado.

Ejemplo 3: Resuelve la ecuación $\log_2(5x+3) - 2\log_2 x = 1$

Respuesta:

$$\log_2(5x+3) - 2\log_2 x = 1 \rightarrow \log_2(5x+3) - \log_2 x^2 = 1 \rightarrow \log_2\left(\frac{5x+3}{x^2}\right) = \log_2 2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{5x+3}{x^2} = 2 \rightarrow 5x+3 = 2x^2 \rightarrow 2x^2 - 5x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{4} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1/2 \text{ (no válida)} \end{cases}$$

Ejercicios: Resuelve las ecuaciones logarítmicas

a) $\log_3(x-4) = 1 - \log_3(x-2)$ b) 2 log (2 x+4) = log (x+2) + log 8

4. **Sistemas de ecuaciones logarítmicas:** Hay varios métodos posibles para resolverlos. Uno de ellos es despejar una de las incógnitas para emplear la sustitución, resolviendo la ecuación. Otro es usar (si es necesario) las propiedades de logaritmos para que las incógnitas queden sólo de la forma “$\log_a x$” y “$\log_a y$”. Se usa entonces cualquier método de resolución de sistemas (por ejemplo, reducción) para calcular esos logaritmos. Una vez calculados, se hallan las incógnitas *x* e *y* sin más que aplicar la definición de logaritmo.