Ecuaciones exponenciales

Se llaman ecuaciones exponenciales a las ecuaciones que tienen todas las incógnitas en el exponente de una potencia. Las bases de éstas serán siempre números positivos.

Ejemplos

Caso1) $2^{x+3}=128$ Caso2) $3^x+3^{x+1}=36$ Caso3) $5^x=16$ Caso3) $2^{x+1}=3^x$

Dependiendo del tipo de ecuación, existen distintos métodos para resolverlas. Incluso hay casos que no se pueden resolver más que por aproximación. En Bachillerato usaremos fundamentalmente dos métodos típicos para casos especiales, y uno general que requiere el uso de logaritmos.

1er Caso: No hay sumas ni restas de potencias, y todos los números son potencias de bases iguales cuando se factorizan.

Se resuelven usando las propiedades de potencias para dejar una sola potencia a cada lado de la igualdad, llegando a una expresión en la que podemos olvidar las bases, ya que $a^x=a^y \Rightarrow x=y$

Los pasos a seguir son: 1º) Factorizar todas las bases y números sueltos. 2º) Usar las propiedades de potencias para dejar una única potencia a cada lado de la igualdad. 3º) Igualar los exponentes.

Ejemplos

1) $2^{x+3}=128 \xrightarrow{\text{Paso 1}} 2^{x+3}=2^7 \xrightarrow{\text{Paso 3}} x+3=7 \rightarrow x=4$

2) $$\frac{5^x}{25^{x+2}}=125^{x-1} \xrightarrow{\text{Paso 1}} \frac{5^x}{(5^2)^{x+2}}=(5^3)^{x-1} \xrightarrow{\text{Paso 2}} \frac{5^x}{5^{2x+4}}=5^{3x-3} \rightarrow 5^{x-(2x+4)}=5^{3x-3} \rightarrow$$
$$\rightarrow 5^{-x-4}=5^{3x-3} \xrightarrow{\text{Paso 3}} -x-4=3x-3 \rightarrow -x-3x=-3+4 \rightarrow -4x=1 \rightarrow x=\frac{-1}{4}$$

3)
$$7^{1-x}\cdot\sqrt[3]{49^{2+x}}=1 \rightarrow 7^{1-x}\cdot\sqrt[3]{(7^2)^{2+x}}=1 \rightarrow 7^{1-x}\cdot\sqrt[3]{7^{4+2x}}=1 \rightarrow 7^{1-x}\cdot 7^{\frac{4+2x}{3}}=1 \rightarrow 7^{1-x+\frac{4+2x}{3}}=7^0 \rightarrow$$
$$\rightarrow 1-x+\frac{4+2x}{3}=0 \rightarrow 3-3x+4+2x=0 \rightarrow -x+7=0 \rightarrow -x=-7 \rightarrow x=7$$

2º Caso: Hay sumas o restas de potencias con la incógnita en el exponente, y las bases de estas potencias son iguales cuando se factorizan. El resto de números no se factorizan.

Se resuelven considerando sólo como potencias a las que son del tipo $a^x, a^{2x}, \cdots$. Normalmente habrá que: 1º) Usar las propiedades de potencias para quitar otros números de los exponentes y operarlos. 2º) Cuando solo queden esas potencias, se hace un cambio de variable $a^x=z,\ a^{2x}=z^2, \cdots$ para resolver la ecuación resultante. 3º) Finalmente, cuando ya se conoce el valor (o los valores) de *z*, se deshace el cambio de variable para calcular *x*. (Si z es una potencia de *a*, queda una ecuación simple del caso anterior. Si *z* es negativo, *x* no tiene solución).

Ejemplos

4) $3^x+3^{x+1}=36 \rightarrow 3^x+3^x\cdot 3^1=36 \xrightarrow{3^x=z} z+z\cdot 3=36 \rightarrow z+3z=36 \rightarrow 4z=36 \rightarrow z=9$

Por lo tanto $3^x=z \rightarrow 3^x=9 \rightarrow 3^x=3^2 \rightarrow x=2$

5)

$$7\cdot 49^x-50\cdot 7^x+7=0 \rightarrow 7\cdot(7^2)^x-50\cdot 7^x+7=0 \rightarrow 7\cdot 7^{2x}-50\cdot 7^x+7=0 \underset{7^{2x}=z^2}{\overset{7^x=z}{\rightarrow}} 7z^2-50z+7=0 \rightarrow$$

$$z=\frac{50\pm\sqrt{2500-196}}{14}=\frac{50\pm 48}{14} \rightarrow \begin{cases} z=\frac{98}{14}=7 \\ z=\frac{2}{14}=\frac{1}{7} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 7^x=7=7^1 \rightarrow x=1 \\ 7^x=\frac{1}{7}=7^{-1} \rightarrow x=-1 \end{cases}$$

3er Caso: No hay sumas ni restas de potencias, pero las bases no son iguales aunque se factoricen.

En ese caso hay que aplicar logaritmos y calcularlos con la calculadora. (Si ésta no tiene una tecla para calcular el logaritmo en cualquier base, siempre se puede usar la tecla del logaritmo decimal teniendo en cuenta que $\log_a x=\frac{\log x}{\log a}$). Hay que recordar que la función logaritmo calcula el exponente cuando conocemos la base y el resultado de la potencia.

6) $5^x=16 \rightarrow x=\log_5 16\approx 1{,}7227$

7)

$$2^{x+1}=3^x \rightarrow \log(2^{x+1})=\log(3^x) \rightarrow (x+1)\log 2=x\log 3 \rightarrow x\log 2+\log 2=x\log 3 \rightarrow$$

$$\rightarrow x\log 2-x\log 3=-\log 2 \rightarrow x(\log 2-\log 3)=-\log 2 \rightarrow x=\frac{-\log 2}{\log 2-\log 3}$$

Como el denominador es negativo, es preferible escribir $x=\frac{\log 2}{\log 3-\log 2}\approx 1{,}7095$

Ejercicios

Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

1. $7^x\cdot 49=7^{6-x}$
2. $\frac{3^{x+1}}{9^{2x}}=\sqrt{27}$
3. $\frac{125\cdot\sqrt[4]{5^{3+2x}}}{25^x}=\sqrt{5^{3-x}}$
4. $\frac{2\cdot\sqrt[4]{8^x}}{4^x\cdot\sqrt{2}}=\sqrt[3]{\frac{32}{2^{2x}}}$
5. $25^x-6\cdot 5^{x+1}+125=0$
6. $9^x-2\cdot 3^x=3$
7. $2^{2x+3}-2^{x+5}=2^x-2^2$
8. $2^x=19$
9. $10^{x+1}=1250$
10. $5^{2x}=7^{x-1}$

Soluciones

1. $7^x \cdot 49 = 7^{6-x} \rightarrow 7^x \cdot 7^2 = 7^{6-x} \rightarrow 7^{x+2} = 7^{6-x} \rightarrow x+2 = 6-x \rightarrow 2x = 4 \rightarrow x = 2$

2. $\frac{3^{x+1}}{9^{2x}} = \sqrt{27} \rightarrow \frac{3^{x+1}}{(3^2)^{2x}} = \sqrt{3^3} \rightarrow \frac{3^{x+1}}{3^{4x}} = 3^{3/2} \rightarrow 3^{x+1-4x} = 3^{3/2} \rightarrow -3x+1 = \frac{3}{2} \rightarrow$
$\rightarrow -6x+2 = 3 \rightarrow -6x = 1 \rightarrow x = \frac{-1}{6}$

3. $\frac{125 \cdot \sqrt[4]{5^{3+2x}}}{25^x} = \sqrt{5^{3-x}} \rightarrow \frac{5^3 \cdot 5^{\frac{3+2x}{4}}}{5^{2x}} = 5^{\frac{3-x}{2}} \rightarrow 5^{3+\frac{3+2x}{4}-2x} = 5^{\frac{3-x}{2}} \rightarrow \frac{12+3+2x-8x}{4} = \frac{3-x}{2} \rightarrow$
$\rightarrow 15-6x = 6-2x \rightarrow 9 = 4x \rightarrow x = \frac{9}{4}$

4. $\frac{2 \cdot \sqrt[4]{8^x}}{4^x \cdot \sqrt{2}} = \sqrt[3]{\frac{32}{2^{2x}}} \rightarrow \frac{2 \cdot \sqrt[4]{(2^3)^x}}{(2^2)^x \cdot \sqrt{2}} = \sqrt[3]{\frac{2^5}{2^{2x}}} \rightarrow \frac{2 \cdot 2^{\frac{3x}{4}}}{2^{2x} \cdot 2^{\frac{1}{2}}} = \frac{2^{\frac{5}{3}}}{2^{2x}} \rightarrow 2^{1+\frac{3x}{4}-2x-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{3}-2x} \rightarrow$
$\rightarrow 1+\frac{3x}{4}-2x-\frac{1}{2} = \frac{5}{3}-2x \rightarrow \frac{3x}{4} = \frac{5}{3}-1+\frac{1}{2} \rightarrow \frac{3x}{4} = \frac{7}{6} \rightarrow x = \frac{28}{18} = \frac{14}{9}$

5. $25^x - 6 \cdot 5^{x+1} + 125 = 0 \rightarrow (5^2)^x - 6 \cdot 5^x \cdot 5^1 + 125 = 0 \rightarrow 5^{2x} - 30 \cdot 5^x + 125 = 0 \underset{5^{2x}=z^2}{\overset{5^x=z}{\rightarrow}}$
$\rightarrow z^2 - 30z + 125 = 0 \rightarrow z = \frac{30 \pm \sqrt{900-500}}{2} = \frac{30 \pm 20}{2} \rightarrow \begin{cases} z = 25 \rightarrow 5^x = 5^2 \rightarrow x = 2 \\ z = 5 \rightarrow 5^x = 5^1 \rightarrow x = 1 \end{cases}$

6. $9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0 \Rightarrow (3^2)^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0 \Rightarrow (3^x)^2 - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$

Cambiamos la variable escribiendo $3^x = z$. Entonces $z^2 - 2z - 3 = 0 \Rightarrow z = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \Rightarrow \begin{cases} z = 3 \\ z = -1 \end{cases}$

Deshaciendo el cambio de variable: $\begin{cases} 3^x = 3 = 3^1 \Rightarrow x = 1 \\ 3^x = -1 \text{ no tiene solución real.} \end{cases}$

7. $2^{2x+3} - 2^{x+5} = 2^x - 2^2 \rightarrow 2^{2x} \cdot 2^3 - 2^x \cdot 2^5 = 2^x - 4 \rightarrow 8 \cdot 2^{2x} - 32 \cdot 2^x - 2^x + 4 = 0 \underset{2^x=z}{\overset{2^{2x}=z^2}{\rightarrow}}$
$\rightarrow 8z^2 - 33z + 4 = 0 \rightarrow z = \frac{33 \pm \sqrt{961}}{16} = \frac{33 \pm 31}{16} \rightarrow \begin{cases} z = 4 \rightarrow 2^x = 4 = 2^2 \rightarrow x = 2 \\ z = 1/8 \rightarrow 2^x = 2^{-3} \rightarrow x = -3 \end{cases}$

8. $2^x = 19 \rightarrow x = \log_2 19 \approx 4{,}248$

9. $10^{x+1} = 1250 \rightarrow x+1 = \log 1250 \rightarrow x = \log(1250) - 1 \approx 2{,}097$

10. $5^{2x} = 7^{x-1} \rightarrow \log(5^{2x}) = \log(7^{x-1}) \rightarrow 2x \log 5 = (x-1) \log 7 \rightarrow$
$\rightarrow 2 \log(5) x = \log(7) x - \log(7) \rightarrow 2 \log(5) x - \log(7) x = -\log 7 \rightarrow$
$\rightarrow (2 \log 5 - \log 7) x = -\log 7 \rightarrow x = \frac{-\log 7}{2 \log 5 - \log 7} \approx -1{,}529$