Ecuaciones exponenciales

Se llaman ecuaciones exponenciales a las ecuaciones que tienen todas las incógnitas en el exponente de una potencia. Las bases de éstas serán siempre números positivos.

Ejemplos

Caso1) $2^{x+3}=128$ Caso2) $3^x+3^{x+1}=36$ Caso3) $5^x=16$ Caso4) $2^{x+1}=3^x$

Dependiendo del tipo de ecuación, existen distintos métodos para resolverlas. Incluso hay casos que no se pueden resolver más que por aproximación. En Bachillerato usaremos fundamentalmente dos métodos típicos para casos especiales, y uno general que requiere el uso de logaritmos.

1er Caso: No hay sumas ni restas de potencias, y todos los números son potencias de bases iguales cuando se factorizan.

Se resuelven usando las propiedades de potencias para dejar una sola potencia a cada lado de la igualdad, llegando a una expresión en la que podemos olvidar las bases, ya que $a^x=a^y \Rightarrow x=y$

Ejemplo 1) $2^{x+3}=128 \rightarrow 2^{x+3}=2^7 \rightarrow x+3=7 \rightarrow x=4$

Más ejemplos

2)

$$\frac{5^x}{25^{x+2}}=125^{x-1} \rightarrow \frac{5^x}{(5^2)^{x+2}}=(5^3)^{x-1} \rightarrow \frac{5^x}{5^{2x+4}}=5^{3x-3} \rightarrow 5^{x-(2x+4)}=5^{3x-3} \rightarrow 5^{-x-4}=5^{3x-3} \rightarrow$$

$$\rightarrow -x-4=3x-3 \rightarrow -x-3x=-3+4 \rightarrow -4x=1 \rightarrow x=\frac{-1}{4}$$

3)

$$7^{1-x}\cdot\sqrt[3]{49^{2+x}}=1 \rightarrow 7^{1-x}\cdot\sqrt[3]{(7^2)^{2+x}}=1 \rightarrow 7^{1-x}\cdot\sqrt[3]{7^{4+2x}}=1 \rightarrow 7^{1-x}\cdot 7^{\frac{4+2x}{3}}=1 \rightarrow 7^{1-x+\frac{4+2x}{3}}=7^0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 1-x+\frac{4+2x}{3}=0 \rightarrow 3-3x+4+2x=0 \rightarrow -x+7=0 \rightarrow -x=-7 \rightarrow x=7$$

2º Caso: Hay sumas o restas de potencias con la incógnita en el exponente, y las bases de estas potencias son iguales cuando se factorizan. El resto de números no se factorizan.

Se resuelven considerando sólo como potencias a las que son del tipo $a^x, a^{2x}, \cdots$. Normalmente habrá que usar las propiedades de potencias para quitar otros números de los exponentes y operarlos. Cuando solo queden esas potencias, se hace un cambio de variable $a^x=z,\ a^{2x}=z^2, \cdots$ para resolver la ecuación resultante. Finalmente, cuando ya conocemos el valor (o los valores) de *z*, deshacemos el cambio de variable para calcular *x*. (Si z es una potencia de *a*, queda una ecuación simple del caso anterior. Si *z* es negativo, *x* no tiene solución).

Ejemplo 4)

$$3^x+3^{x+1}=36 \rightarrow 3^x+3^x\cdot 3^1=36 \xrightarrow{3^x=z} z+z\cdot 3=36 \rightarrow z+3z=36 \rightarrow 4z=36 \rightarrow z=9$$

Por lo tanto $3^x=z \rightarrow 3^x=9 \rightarrow 3^x=3^2 \rightarrow x=2$

5)

$$7\cdot 49^x-50\cdot 7^x+7=0 \rightarrow 7\cdot(7^2)^x-50\cdot 7^x+7=0 \rightarrow 7\cdot 7^{2x}-50\cdot 7^x+7=0 \xrightarrow[7^{2x}=z^2]{7^x=z} 7z^2-50z+7=0 \rightarrow$$

$$z=\frac{50\pm\sqrt{2500-196}}{14}=\frac{50\pm 48}{14} \rightarrow \begin{cases} z=\frac{98}{14}=7 \\ z=\frac{2}{14}=\frac{1}{7} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 7^x=7=7^1 \rightarrow x=1 \\ 7^x=\frac{1}{7}=7^{-1} \rightarrow x=-1 \end{cases}$$