Composición de funciones

Idea inicial

Al componer las funciones *f* (*x*) y *g*(*x*) sobre un valor *x*=*a*, primero se sustituye *x* por *a* en la fórmula de *f* (*x*) para obtener *f* (*a*)=*b*, y luego se sustituye *x* por *b* en la fórmula de *g*(*x*) para obtener *g*(*b*). Por lo tanto, estamos calculando *g*(*b*) = g (*f* (*a*)).

Por ejemplo: Si $f(x)=x^2-3x$ y $g(x)=\frac{2}{x}$, y queremos componer *f* y *g* sobre el valor *x*=2, calculamos $f(2)=2^2-3\cdot 2=-2$ y luego $g(-2)=\frac{2}{-2}=-1$. Así, $g(f(2))=-1$

Es importante tener en cuenta el orden. Si componemos *f* con *g* obtenemos normalmente (pero no siempre) un resultado distinto que si componemos *g* con *f*.

Ejemplo: Componiendo *g*(*x*) con *f* (*x*) sobre x=2 como antes, obtenemos primero $g(2)=\frac{2}{2}=1$ y luego $f(1)=1^2-3\cdot 1=-2$. Es decir, $f(g(2))=-2$ mientras que $g(f(2))=-1$.

Composición

En general, componer dos funciones *f*(*x*) y *g*(*x*) consiste en aplicar la segunda sobre el resultado obtenido por la primera. La composición de *f* y *g* se escribe $g\circ f$ (Hay que notar que se escribe al revés de como se dice: *f* compuesta con *g* se escribe *g* “circulito” *f*). También se escribe $g(f(x))$

El dominio de *f* compuesta con *g* es el dominio de *f* quitando los valores cuya imagen no esté en el dominio de *g*, porque no se podrían calcular.

En el ejemplo anterior, $\text{Dominio}(f)=\mathbb{R},\ \text{Dominio}(g)=\mathbb{R}-\{0\}$ Para calcular el dominio de $g\circ f$ hay que quitar de $\mathbb{R}$ los valores que hagan $f(x)=0$ porque no existe $g(0)$.

Así, como $f(x)=0\rightarrow x^2-3x=0\rightarrow x(x-3)=0\rightarrow\begin{cases}x=0\\x=3\end{cases}$, tendremos $\text{Dominio}(g\circ f)=\mathbb{R}-\{0,3\}$.

Por otra parte, $\text{Dominio}(f\circ g)=\mathbb{R}-\{0\}$, pues *g* no se calcula en 0 y *f* siempre se puede calcular.

Fórmula (expresión analítica) de la función compuesta

Como vimos en los ejemplos, $g\circ f(x)=g(f(x))$ (se lee abreviadamente “g de f de x”) y se puede calcular **sustituyendo** todas las x de la segunda función por la fórmula completa de la primera. Después hay que operar y simplificar el resultado.

Ejemplos: Con las funciones anteriores, $f(x)=x^2-3x$ y $g(x)=\frac{2}{x}$

$$g\circ f(x)=g(f(x))=\frac{2}{f(x)}=\frac{2}{x^2-3x}$$

$$f\circ g(x)=f(g(x))=(g(x))^2-3g(x)=\left(\frac{2}{x}\right)^2-3\cdot\frac{2}{x}=\frac{4}{x^2}-\frac{6}{x}=\frac{4-6\text{x}}{x^2}$$ (hallando el divisor común)

$$f\circ f(x)=f(f(x))=(f(x))^2-3f(x)=(x^2-3x)^2-3(x^2-3x)=x^4-6x^3+9x^2-3x^2+9x=$$
$$=x^4-6x^3+6x^2+9x$$ (recordando la identidad notable $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$)

$$g\circ g(x)=g(g(x))=\frac{2}{g(x)}=\frac{2}{\frac{2}{x}}=2\div\frac{2}{x}=\frac{2\text{x}}{2}=x$$

Inversa (o Recíproca) de una función

Idea inicial

Dada una función $f(x)$, se llama función inversa de f (o función recíproca de f) a otra función (escrita como $f^{-1}(x)$) que invierte la “x” y la “y” de la tabla de valores de f.

Por ejemplo, si $f(x)= 2x - 1$ su tabla de valores sería (dando a x unos valores cualesquiera):

x	$y = 2x - 1$
0	– 1
1	1
2	3
4	7

En ese caso, su inversa será la función $f^{-1}(x)$ cuya tabla de valores es:

x	$y = f^{-1}(x)$
– 1	0
1	1
3	2
7	4

Justo al revés. Pero deberá invertir también todos los demás valores, aunque no aparezcan en la tabla. Claramente, si aplicamos primero $f(x)$ y luego $f^{-1}(x)$, o al revés, volvemos al valor inicial.

Inversa de una función

Se dice que una función $f(x)$ tiene inversa si existe otra función $f^{-1}(x)$ de forma que $f^{-1}\circ f(x)=x$ para cualquier valor $x\in\text{Dominio}(f)$. En ese caso también se cumple $f\circ f^{-1}(x)=x \quad \forall x\in\text{Dom}(f^{-1})$

(Llamando Identidad a la función $I(x)=x$, se tiene $f\circ f^{-1}=f^{-1}\circ f=I$)

No todas las funciones tienen inversa. En particular, no las tienen si hay valores repetidos.
Por ejemplo, si g(1)=5 y g(2)=5 ¿Cuánto será $g^{-1}(5)$? ¿1? ¿2?
En cualquier caso falla $g^{-1}\circ g=I$ en 2 o en 1.

Cálculo de la inversa

En la fórmula $y = f(x)$ despejamos la x dejándola sola a un lado de la igualdad, siempre que se pueda.
$f^{-1}(x)$ se obtiene sustituyendo las “y” del otro lado de la igualdad por “x” .
Ejemplo 1: Hallamos la inversa de $f(x) = 2x - 1$

Partimos de $y = 2x - 1$ y despejamos la x: $y=2x-1 \rightarrow y+1=2x \rightarrow \dfrac{y+1}{2}=x$

Entonces $\boxed{f^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{2}}$ poniendo x en lugar de la y en la fórmula obtenida.

Ejemplo 2: Inversa de $g(x)=\dfrac{x+1}{2x-3}$

$$y=\frac{x+1}{2x-3} \rightarrow y\cdot(2x-3)=x+1 \rightarrow 2xy-3y=x+1 \rightarrow 2xy-x=1+3y$$

Sacando x de factor común $x(2y-1)=1+3y \rightarrow x=\dfrac{1+3y}{2y-1}$ Así , $\boxed{g^{-1}(x)=\dfrac{1+3x}{2x-1}}$