

## Ejercicios de repaso de Matemáticas de Bachillerato

### ***Funciones: dominio, operaciones, función recíproca.***

**Dominio de una función:**  $D = \text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\}$

Es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente (generalmente “x”). Si la función está dada de forma analítica (es decir, con una fórmula) hay que quitar los valores que lleven a una operación imposible en los números reales: división entre 0, raíz (de índice par) de un negativo, logaritmo de un no-positivo, tangente de un ángulo de coseno nulo (en radianes  $\pi/2 + k.\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ), arcoseno de un número de valor absoluto mayor que 1... Si la función tiene varias fórmulas por estar definida a trozos, al lado de cada fórmula debe venir el dominio de aplicación de cada fórmula, aunque se sobrentiende que se quitan los valores que llevan a una operación errónea.

El dominio se expresa como el conjunto  $\mathbb{R}$ , como un intervalo o unión de varios intervalos, o como uno de esos conjuntos al que se le quitan (diferencia de conjuntos, que se escribe como la resta) los valores que llevan a la operación imposible de efectuar (se escriben entre llaves).

### **Calcula el dominio de las siguientes funciones:**

1.  $f(x) = x^2 - x - 6$

2.  $g(x) = \frac{1}{x^2 - x - 6}$

3.  $h(x) = \frac{2x - 4}{x^2 - x - 6}$

4.  $l(x) = \frac{3x + 2}{x^2 - 5}$

5.  $m(x) = \frac{1 - x}{x^3 + x^2 - 9x - 9}$

6.  $n(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12}$

7.  $F(x) = \sqrt{2x - 6}$

8.  $G(x) = \sqrt[3]{x + 1}$

9.  $H(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$

10.  $L(x) = \sqrt{25 - x^2}$

11.  $M(x) = \sqrt{x^3 - 4x^2 + x - 6}$

12.  $N(x) = \sqrt{\frac{2x - 1}{9 - x^2}}$

13.  $P(x) = \sqrt{\frac{3x - 9}{x^3 - x}}$

14.  $f_1(x) = \log(3x + 6)$

15.  $f_2(x) = \ln(8 - x^2)$

16.  $f_3(x) = \log\left(\frac{x - 2}{6 - x}\right)$

17.  $f_4(x) = \text{sen}\left(\frac{x + 4}{x - 1}\right)$

18.  $f_5 = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

## Operaciones de funciones

$+$ ,  $-$ ,  $\cdot$ ,  $\div$ , ... La suma, resta, multiplicación, división, potencia, etc. de funciones se define sumando, restando, multiplicando, dividiendo o elevando las fórmulas que definen a cada una de ellas. Se debe simplificar la fórmula lo máximo posible. Su dominio será aquel en que tengan sentido tanto las funciones que se operan como el resultado de la operación.

° **Composición de funciones.** Consiste en aplicar la segunda función sobre el resultado de haber aplicado la primera. Para ello se sustituye la variable de la función exterior (la más alejada de la  $x$ ) por la fórmula de la interior, simplificando el resultado si es posible.

¡Atención! La composición no es conmutativa. En la mayoría de los casos

$$f(g(x)) \neq g(f(x))$$

**$f^{-1}$ , función recíproca de  $f$ .** Es la función que intercambia los valores de las variables dependiente e independiente (generalmente  $x$  e  $y$ ) de forma que si  $f(x)=y$ ,  $f^{-1}(y)=x$ . En la práctica siempre se llama “ $x$ ” a la variable a la que se dan los valores, por lo que escribiremos  $f^{-1}(x)$ . Sólo existe si  $f(x)$  no repite dos valores iguales (porque no sabríamos a cual de los dos corresponde la inversa de ese valor), aunque se admite en los intervalos donde no ocurra eso. La expresión analítica de  $f^{-1}(x)$  se calcula despejando la “ $x$ ” de la fórmula  $y=f(x)$ , y sustituyendo luego todas las “ $y$ ” por “ $x$ ”.

**Dadas las funciones  $f(x) = x+3$ ,  $g(x) = 1/x$  y  $h(x) = \text{sen}(x)$ , calcula:**

- |                |                        |
|----------------|------------------------|
| 1. $f + g$     | 7. $h(g(x))$           |
| 2. $f \cdot g$ | 8. $g(h(x))$           |
| 3. $f / g$     | 9. $f^{-1}$            |
| 4. $g \cdot h$ | 10. $g^{-1}$           |
| 5. $f(g(x))$   | 11. $(f+g)^{-1}$       |
| 6. $g(f(x))$   | 12. $(f \cdot g)^{-1}$ |

## Ejercicios

1. Determina el dominio de las funciones

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x-3}{x^3-x^2-2x}}, \quad g(x) = \log\left(\frac{x-3}{x^4-8x^2+16}\right)$$

2. Determina el dominio de la función  $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } -4 \leq x < 0 \\ \frac{2}{x} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 3x-1 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$

3. Dadas las funciones  $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$  y  $g(x) = \frac{x}{x^2-4}$

- Halla la función  $(g \circ f)(x)$
- Halla  $f^{-1}(x)$
- Calcula el dominio de  $f$ ,  $g$ ,  $g \circ f$  y  $f^{-1}$

**Respuesta a los ejercicios:****Dominios**

1.  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
2.  $\text{D}(g) = \mathbb{R} - \{-2, 3\}$
3.  $\text{D}(h) = \mathbb{R} - \{-2, 3\}$
4.  $\text{D}(l) = \mathbb{R} - \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$
5.  $\text{D}(m) = \mathbb{R} - \{-3, -1, 3\}$
6.  $\text{D}(n) = \mathbb{R} - \{-2, -1, 2, 3\}$
7.  $\text{D}(F) = [3, \infty)$
8.  $\text{D}(G) = \mathbb{R}$
9.  $\text{D}(H) = (-\infty, 1] \cup [4, \infty)$
10.  $\text{D}(L) = [-5, 5]$
11.  $\text{D}(M) = [-1, 2] \cup [3, \infty)$
12.  $\text{D}(N) = (-\infty, -3) \cup [1/2, 3)$
13.  $\text{D}(P) = (-\infty, -1) \cup (0, 1) \cup [3, \infty)$
14.  $\text{D}(f_1) = (-2, \infty)$
15.  $\text{D}(f_2) = (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$
16.  $\text{D}(f_3) = (2, 6)$
17.  $\text{D}(f_4) = \mathbb{R} - \{1\}$
18.  $\text{D}(f_5) = \mathbb{R} - \{\pi/4 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

**Operaciones de funciones**

1.  $(f+g)(x) = \frac{x^2+3x+1}{x}$        $\text{D} = \mathbb{R} - \{0\}$
2.  $(f \cdot g)(x) = \frac{x+3}{x}$        $\text{D} = \mathbb{R} - \{0\}$
3.  $(f/g)(x) = x^2+3x$        $\text{D} = \mathbb{R} - \{0\}$
4.  $(g \cdot h)(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$        $\text{D} = \mathbb{R} - \{0\}$
5.  $f(g(x)) = \frac{3x+1}{x}$        $\text{D} = \mathbb{R} - \{0\}$
6.  $g(f(x)) = \frac{1}{x+3}$        $\text{D} = \mathbb{R} - \{-3\}$
7.  $h(g(x)) = \text{sen} \left( \frac{1}{x} \right)$        $\text{D} = \mathbb{R} - \{0\}$
8.  $g(h(x)) = \frac{1}{\text{sen } x}$        $\text{D} = \mathbb{R} - \{\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
9.  $f^{-1}(x) = x - 3$        $\text{D} = \mathbb{R}$
10.  $g^{-1}(x) = 1/x = g(x)$        $\text{D} = \mathbb{R} - \{0\}$
11.  $(f+g)^{-1}(x) = \frac{y-3 \pm \sqrt{y^2-6y+5}}{2}$  (hay que elegir uno de los signos)
12.  $(f \cdot g)^{-1}(x) = \frac{3}{y-1}$        $\text{D} = \mathbb{R} - \{1\}$

**Ejercicios**

1.  $\text{Dom}(f) = (-\infty, -1) \cup (0, 1/3) \cup [3/2, \infty)$        $\text{Dom}(g) = (3, \infty)$
2.  $\text{Dom}(f) = [-4, 0) \cup (0, 1] \cup (1, 2] = [-4, 2] - \{0\}$
3.  $g(f(x)) = \frac{-2x^2-x+1}{12x}$        $\text{D} = \mathbb{R} - \{-1, 0\}$   
 $f^{-1}(x) = \frac{1+x}{2-x}$        $\text{D} = \mathbb{R} - k\pi, k \in \mathbb{Z}$