Irracionales. Operaciones con radicales

Las raíces no exactas y sus operaciones con números racionales dan lugar a números irracionales, con infinitas cifras decimales que no se repiten periódicamente. Como no pueden escribirse completamente, se escriben con el símbolo radical " √ " . Así, por ejemplo

$\sqrt{2}$ (en lugar de 1,41421356...) $1+\sqrt{3}$ (en vez de 2,73205080...) $\sqrt[3]{5}$ (mejor que 1,70997594...)

Notación: En la expresión $a\sqrt[n]{b}$, se dice que *a* es el **coeficiente** (está multiplicando; si no aparece es un 1), *n* el **índice** (si no está escrito se sobrentiende que es 2), *b* es el **radicando**, y √ el símbolo **radical**. Los números, ecuaciones, etc con ese símbolo se llaman también **radicales**. La operación es la **radicación** (que es inversa de la potenciación) y el resultado obtenido al realizarla es la **raíz**. La raíz cuadrada de 2 es 1,41421356.... porque $(1,41421356...)^2 = 2$.

El problema consiste en que un mismo número puede escribirse con radicales bastante diferentes.

Por ejemplo, $\sqrt{8}\ ,\ 2\cdot\sqrt{2}\ ,\ \dfrac{4}{\sqrt{2}}\ ,\ \sqrt[4]{64}\ ...$ representan todos al mismo número 2,82842712...

Para elegir la forma más sencilla de representar una raíz no exacta, se pueden realizar las siguientes operaciones:

1. **Escribir radicales como potencias**: Por definición $\boxed{\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}}$ (Cuando "n" no aparece se sobrentiende que vale 2 , y cuando "m" no está, se puede escribir como 1). Se puede entonces operar siguiendo las propiedades de las potencias y las operaciones con fracciones. En particular, simplificar las fracciones es equivalente a dividir índice y exponentes entre un divisor común, como en el primer ejemplo. (Observación: Esto solo es útil con productos o divisiones. Si hay sumas o restas de raíces, no sirve de nada escribirlas como potencias. Es mejor seguir el procedimiento explicado en el punto 3).

   Ejemplos: $\sqrt[9]{2^3\cdot 5^6}=2^{\frac{3}{9}}\cdot 5^{\frac{6}{9}}=2^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{2\cdot 5^2}$ $\quad\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{8}=\sqrt{2^1}\cdot\sqrt[4]{2^3}=2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{3}{4}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}=2^{\frac{5}{4}}=\sqrt[4]{2^5}$

   $$\frac{\sqrt{3\sqrt[5]{3^4}}}{3\sqrt[3]{3^2}}=\frac{\left(3\cdot 3^{\frac{4}{5}}\right)^{\frac{1}{2}}}{3\cdot 3^{\frac{2}{3}}}=\frac{3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{4}{10}}}{3^1\cdot 3^{\frac{2}{3}}}=3^{\frac{1}{2}+\frac{4}{10}-1-\frac{2}{3}}=3^{\frac{15+12-30-20}{30}}=3^{\frac{-23}{30}}=\frac{1}{3^{\frac{23}{30}}}=\frac{1}{\sqrt[30]{3^{23}}}$$

   Ejercicios: Escribe como potencias y simplifica.

   a) $\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt[6]{125}=$ b) $\dfrac{\sqrt{8}\cdot\sqrt[4]{32}}{\sqrt[3]{4}}=$ c) $\sqrt{7\sqrt{7\sqrt[4]{7^3}}}=$

2. **Sacar factores del radical**: Cuando el exponente de un factor dentro del radical es mayor o igual que el índice, se puede dividir entre este, hallando un cociente y un resto enteros. Sale del radical (multiplicando) la base del factor elevada al cociente, y queda dentro del radical la misma base elevada al resto (o nada, si el resto es cero).

   Ejemplos: $3\sqrt[3]{2^7\cdot 5^{12}\cdot 7^5}=3\cdot 2^2\cdot 5^4\cdot 7\sqrt[3]{2\cdot 7^2}$ $\quad\sqrt{2^7\cdot 3^5}=2^3\cdot 3^2\sqrt{2\cdot 3}=72\sqrt{6}$

   Ejercicios: Extrae del radical todo lo posible.

   a) $2\sqrt[4]{2^7\cdot 3^8}=$ b) $5\sqrt{72}=$ c) $-3\sqrt[3]{16x^5y^6}=$

3. **Sumas y restas de radicales**: Solo se pueden sumar o restar cuando tienen el mismo índice y el mismo radicando, y en ese caso se suman o restan sus coeficientes. Si es necesario, se sacan del radical todos los factores que se pueda para comprobar qué raíces son iguales.

   Ejemplos: $7\sqrt{2}-3\sqrt{2}+\sqrt{2}=(7-3+1)\sqrt{2}=5\sqrt{2}$

   $$\sqrt[3]{16}+3\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{81}+2\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{2^4}+3\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3^4}+2\sqrt[3]{2^3\cdot 3}=2\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{3}+2\cdot 2\sqrt[3]{3}=$$
   $$=5\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{3}+4\sqrt[3]{3}=5\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$$

   Ejercicios: Saca factores de los radicales y opera.

   a) $2\sqrt{12}+\sqrt{75}-2\sqrt{27}=$ b) $\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{250}-3\sqrt[3]{128}=$

4. **<u>Multiplicaciones y divisiones</u>**: Si tienen el mismo índice, se pueden poner todos los factores bajo un único radical con ese índice. Si los índices son distintos, debe elegirse primero como <u>índice común el m.c.m. de todos los índices</u>, multiplicando los <u>exponentes</u> de los factores que hay dentro de cada radical <u>por el m.c.m dividido entre el índice correspondiente</u>. (Conviene sacar factores del resultado cuando el exponente es mayor que el índice).

   Ejemplos: $\sqrt[5]{2^4}\cdot\sqrt[5]{2^3}=\sqrt[5]{2^4\cdot 2^3}=\sqrt[5]{2^7}=2\sqrt[5]{2^2}$ $\qquad \dfrac{\sqrt[3]{5^4}}{\sqrt[3]{5^3}}=\sqrt[3]{\dfrac{5^4}{5^3}}=\sqrt[3]{5}$

   $$\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[3]{3^2}}=\frac{\sqrt[12]{3^{1\cdot 6}}\cdot\sqrt[12]{3^{3\cdot 3}}}{\sqrt[12]{3^{2\cdot 4}}}=\sqrt[12]{\frac{3^6\cdot 3^9}{3^8}}=\sqrt[12]{3^7}$$

   Ejercicios: Opera y simplifica.

   a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{10}=$ b) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[6]{2^5}\cdot\sqrt[4]{2^3}=$ c) $\dfrac{\sqrt[6]{3^5}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[5]{3^2}}=$

5. **<u>Potencias y raíces</u>**: Para elevar una raíz a un exponente *n* basta con <u>elevar el radicando</u> (multiplicando *n* por los exponentes que haya dentro de la raíz). Para hallar una raíz dentro de otra <u>se multiplican los índices</u>. (Conviene sacar factores y dejar un solo radical).

   Ejemplos: $\left(\sqrt[3]{2^2\cdot 5}\right)^7=\sqrt[3]{(2^2\cdot 5)^7}=\sqrt[3]{2^{14}\cdot 5^7}=2^4\cdot 5^2\sqrt[3]{2^2\cdot 5}$

   $$\sqrt{3\sqrt[5]{3\sqrt{3}}}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{\sqrt[5]{3}}\cdot\sqrt{\sqrt[5]{\sqrt{3}}}=\sqrt{3}\cdot\sqrt[2\cdot 5]{3}\cdot\sqrt[2\cdot 5\cdot 2]{3}=\sqrt{3}\cdot\sqrt[10]{3}\cdot\sqrt[20]{3}=\sqrt[20]{3^{10}\cdot 3^2\cdot 3}=\sqrt[20]{3^{13}}$$

   Ejercicios: Opera y simplifica.

   a) $\left(\sqrt{7}\cdot\sqrt[5]{7^2}\right)^4=$ b) $\sqrt{\dfrac{5\sqrt[3]{5}}{\sqrt{5}}}=$

6. **Racionalizar**: Consiste en quitar los radicales del denominador de una fracción pasando a otra equivalente pero con denominador entero. Para ello <u>se multiplican el numerador y el denominador</u> por un mismo radical adecuado, que consigue eliminar la raíz del denominador. Hay tres casos típicos:

   1º) Raíz cuadrada en el denominador: se multiplican <u>por esa misma raíz</u>.

   Ejemplos: $\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ $\qquad \dfrac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{7}}=\dfrac{2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}}{3\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}}=\dfrac{2\sqrt{35}}{3\cdot 7}=\dfrac{2\sqrt{35}}{21}$

   2ª) Raíz de índice *n* en el denominador: se multiplican <u>por la misma raíz elevada a la diferencia entre *n* y el exponente del radicando</u>.

   Ejemplo: $\dfrac{4}{\sqrt[7]{3^2}}=\dfrac{4\cdot\sqrt[7]{3^5}}{\sqrt[7]{3^2}\cdot\sqrt[7]{3^5}}=\dfrac{4\cdot\sqrt[7]{3^5}}{\sqrt[7]{3^7}}=\dfrac{4\sqrt[7]{3^5}}{3}$

   3º) Denominador con sumas o restas con raíces cuadradas: se multiplican <u>por el conjugado del denominador</u>, es decir, los mismos sumandos pero cambiando el signo entre ellos. En el denominador quedará una identidad notable: "Suma por diferencia = Diferencia de cuadrados", por lo que desaparecerán las raíces.

   Ejemplos:

   $$\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})}=\frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{5-2}=\frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{3}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$$

   $$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)\cdot(\sqrt{3}+1)}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-1^2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{3-1}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

   Ejercicios: Racionaliza y simplifica.

   a) $\dfrac{\sqrt{3}}{3\sqrt{6}}$ b) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{6}}$ c) $\dfrac{\sqrt{3}}{3-\sqrt{6}}$