Potencias en números racionales

Se definen las potencias de exponente no positivo $\boxed{a^{-n} = (1/a)^n = 1/a^n}$ y $\boxed{a^0 = 1}$ siendo $a \neq 0$, para que sigan cumpliéndose las mismas **propiedades** de las potencias que conocemos para números naturales:

1)	$(a.b)^n = a^n.b^n$,	$(a/b)^n = a^n/b^n$
2)	$a^m.\ a^n = a^{m+n}$,	$a^m/a^n = a^{m-n}$
3)	$(a^m)^n = a^{m\cdot n}$,	$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$

siendo a y b números racionales no nulos $a,\ b \in \mathbb{Q} - \{0\}$ m y n enteros $m, n \in \mathbb{Z}$. $0^n = 0$ si n es positivo, y no existe en ningún otro caso.

Observaciones: * Un exponente negativo no cambia el signo, sino numerador por denominador.

$3^{-2} = (1/3)^2 = 1/9$ $(1/5)^{-3} = 5^3 = 125$ $(2/3)^{-1} = 3/2$ $(3/4)^{-2} = (4/3)^2 = 16/9$ 0^{-3} no existe
$(-3)^{-3} = (-1/3)^3 = -1/27$ $(-2)^{-4} = (-1/2)^4 = +1/16$ (4 es par) $(-5/2)^{-3} = (-2/5)^3 = -8/125$

* Cualquier número, excepto el 0, elevado a 0 da 1.
$7^0 = 1$ $(-2)^0 = 1$ $(3/4)^0 = 1$ $(-5/3)^0 = 1$ 0^0 no existe

Ejercicios de simplificación de potencias

1. **Sumas y Restas:** Sólo pueden simplificarse si coinciden las bases y los exponentes de las potencias en todos los sumandos, y en ese caso se suman los coeficientes y se escribe la misma potencia.
   Ejemplos) $2\cdot3^5 + 5\cdot3^5 = (2+5)3^5 = 7\cdot3^5$ $2^7 + 3\cdot2^7 = (1+3)2^7 = 4\cdot2^7 = 2^2\cdot2^7 = 2^9$
   Cuando sólo coinciden las bases, puede sacarse de factor común la potencia con menor exponente, y operar con el resto de los números normalmente, calculando el resultado numérico de éstos.
   Ejemplo) $2^{10} + 2^{11} - 3\cdot2^9 = (2 + 2^2 - 3)2^9 = (2 + 4 - 3)2^9 = 3\cdot2^9$
   Ejercicios: a) $3^8 + 3^8 + 3^8 =$ b) $5^7 + 4\cdot5^7 - 2\cdot5^7 =$
   c) $7^{23} + 7^{24} - 3\cdot7^{23} =$ d) $\frac{2}{3}5^7 + 5^7 - \frac{1}{2}5^8 =$
   e) $2^{-8} + 5\cdot2^{-7} - 2^{-9} =$ (Atención ¿cuál es el menor exponente?)
   f) $7\cdot10^{-24} + 2\cdot10^{-26} - 3\cdot10^{-25} =$
   g) $(0,\hat{3})^6 + 3^{-6} - (0,\hat{6})^7 =$ (Escribe los decimales periódicos como fracciones irreducibles)

2. **Multiplicaciones y divisiones:** Se descomponen todas las bases, si es necesario, para trabajar sólo con bases que sean números primos (o con la base 10), y se suman o restan los exponentes de las potencias con la misma base. Si la base es un decimal, se escribe su fracción generatriz simplificada. Es conveniente estudiar primero el signo del resultado, escribirlo delante si es "–", y dejar todas las bases en positivo, recordando que "(negativo)^{par} = positivo", y que "(negativo)^{impar} = negativo".
   a) $3^{-7}.9^4.(-3)^5.(-3)^{-8} =$ b) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 . \left(\frac{2}{3}\right)^{-6} . 2^4 . 3^{-2} =$ c) $\frac{2^{12}.3^{-5}.4^{-3}.3^4}{9^3.8^3.3^{-7}.2^2} =$
   d) $\frac{10^7.1000^3.0,01^5}{100^6.10^4.0,0001^4} =$ e) $(0,\hat{3})^4.3^2 =$ f) $(1,1\hat{6})^5\, 2^4.7^{-7}(0,\hat{6})^2 =$

3. **Potencias y raíces:** Se descomponen las bases en números primos y se multiplican sus exponentes por aquel al que se elevan, o se dividen entre el índice de la raíz en la que están (es 2 cuando éste no está escrito). (Propiedad 3). Luego se resuelven las multiplicaciones y divisiones como antes.
   a) $\left(2(4)^3\right)^5 =$ c) $\sqrt[5]{2(4)^7} =$
   b) $\frac{3\left(2^4(3)^5\right)^{-3}}{9^{-4}\left(8(6)^7\right)^3} =$ d) $\sqrt{\frac{3\sqrt[5]{243}}{8\sqrt{64}}} =$

Ejercicios de simplificación de potencias. Resolución

Nota: Estos ejercicios pueden y deben resolverse con muchos menos pasos. Aquí se han exagerado para que no haya dudas.

Sumas y restas:

a) $3^8 + 3^8 + 3^8 = (1 + 1 + 1)\cdot 3^8 = 3\cdot 3^8 = 3^9$

b) $5^7 + 4\cdot 5^7 - 2\cdot 5^7 = (1 + 4 - 2)\cdot 5^7 = 3\cdot 5^7$

c) $7^{23} + 7^{24} - 3\cdot 7^{23} = 7^{23} + 7\cdot 7^{23} - 3\cdot 7^{23} = (1 + 7 - 3)\cdot 7^{23} = 5\cdot 7^{23}$

d) $\frac{2}{3}5^7+5^7-\frac{1}{2}5^8=\frac{2}{3}\cdot 5^7-1\cdot 5^7-\frac{5}{2}\cdot 5^7=\left(\frac{2}{3}+1-\frac{5}{2}\right)\cdot 5^7=\left(\frac{4+6-15}{6}\right)5^7=\frac{-5}{6}\cdot 5^7=\frac{-5^8}{6}$

e) $2^{-8} + 5\cdot 2^{-7} - 2^{-9} = 2\cdot 2^{-9} + 5\cdot 2^2\cdot 2^{-9} - 2^{-9} = 2\cdot 2^{-9} + 20\cdot 2^{-9} - 1\cdot 2^{-9} = (2 + 20 - 1)\cdot 2^{-9} = 21\cdot 2^{-9}$

f) $7\cdot 10^{-24} + 2\cdot 10^{-26} - 3\cdot 10^{-25} = 7\cdot 10^2\cdot 10^{-26} + 2\cdot 10^{-26} - 3\cdot 10\cdot 10^{-26} = 700\cdot 10^{-26} + 2\cdot 10^{-26} - 30\cdot 10^{-26} =$
$= (700 + 2 - 30)\cdot 10^{-26} = 672\cdot 10^{-26} = 6{,}72\cdot 10^{-24}$

g) $(0,\hat{3})^6+3^{-6}-(0,\hat{6})^7=\left(\frac{3}{9}\right)^6+3^{-6}-\left(\frac{6}{9}\right)^7=\left(\frac{1}{3}\right)^6+3^{-6}-\left(\frac{2}{3}\right)^7=3^{-6}+3^{-6}-2^7\cdot 3^{-7}=$
$=3\cdot 3^{-7}+3\cdot 3^{-7}-128\cdot 3^{-7}=(3+3-128)\cdot 3^{-7}=-122\cdot 3^{-7}$

Multiplicaciones y divisiones:

a) $3^{-7}.9^4.(-3)^5.(-3)^{-8} = -3^{-7}\cdot (3^2)^4\cdot 3^5\cdot 3^{-8} = -3^{(-7+8+5-8)} = -3^{-2}$
$+ \cdot + \cdot - \cdot + = - \uparrow$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-6}\cdot 2^4\cdot 3^{-2}=2^5\cdot 2^{-6}\cdot 2^4\cdot 3^{-5}\cdot 3^6\cdot 3^{-2}=2^{5-6+4}\cdot 3^{-5+6-2}=2^3\cdot 3^{-1}=\frac{2^3}{3}$

c) $\frac{2^{12}\cdot 3^{-5}\cdot 4^{-3}\cdot 3^4}{9^3\cdot 8^3\cdot 3^{-7}\cdot 2^2}=\frac{2^{12}\cdot 3^{-5}\cdot (2^2)^{-3}\cdot 3^4}{(3^2)^3\cdot (2^3)^3\cdot 3^{-7}\cdot 2^2}=\frac{2^{12}\cdot 3^{-5}\cdot 2^{-6}\cdot 3^4}{3^6\cdot 2^9\cdot 3^{-7}\cdot 2^2}=2^{12-6-9-2}\cdot 3^{-5+4-6+7}=2^{-5}\cdot 3^0=2^{-5}$

d) $\frac{10^7\cdot 1000^3\cdot 0{,}01^5}{100^6\cdot 10^4\cdot 0{,}0001^4}=\frac{10^7\cdot (10^3)^3\cdot (10^{-2})^5}{(10^2)^6\cdot 10^4\cdot (10^{-4})^4}=\frac{10^7\cdot 10^9\cdot 10^{-10}}{10^{12}\cdot 10^4\cdot 10^{-16}}=10^{7+9-10-12-4+16}=10^6$

e) $(0,\hat{3})^4\cdot 3^2=\left(\frac{3}{9}\right)^4\cdot 3^2=\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot 3^2=3^{-4}\cdot 3^2=3^{-4+2}=3^{-2}$

f)
$(1,1\hat{6})^5\cdot 2^4\cdot 7^{-7}\cdot (0,\hat{6})^2=\left(\frac{116-11}{90}\right)^5\cdot 2^4\cdot 7^{-7}\cdot\left(\frac{6}{9}\right)^2=\left(\frac{105}{90}\right)^5\cdot 2^4\cdot 7^{-7}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{7}{6}\right)^5\cdot 2^4\cdot 7^{-7}\cdot 2^2\cdot 3^{-2}=$
$=7^5\cdot 2^{-5}\cdot 3^{-5}\cdot 2^{4+2}\cdot 7^{-7}\cdot 3^{-2}=2^{-5+6}\cdot 3^{-5-2}\cdot 7^{5-7}=2^1\cdot 3^{-7}\cdot 7^{-2}=\frac{2}{3^7\cdot 7^2}$

Potencias y raíces:

a) $\left(2(4)^3\right)^5=2^5\left(2^2\right)^{15}=2^5\cdot 2^{30}=2^{35}$

b) $\frac{3\left(2^4(3)^5\right)^{-3}}{9^{-4}\left(8(6)^7\right)^3}=\frac{3\cdot 2^{-12}\cdot 3^{-15}}{(3^2)^{-4}\cdot (2^3)^3\cdot (2\cdot 3)^{21}}=\frac{2^{-12}\cdot 3^{1-15}}{3^{-8}\cdot 2^9\cdot 2^{21}\cdot 3^{21}}=2^{-12-9-21}\cdot 3^{-14+8-21}=2^{-42}\cdot 3^{-27}$

c) $\sqrt[5]{2(4)^7}=\sqrt[5]{2\cdot (2^2)^7}=\sqrt[5]{2\cdot 2^{14}}=\sqrt[5]{2^{15}}=2^{15/5}=2^3$

d) $\sqrt{\frac{3\sqrt[5]{243}}{8\sqrt{64}}}=\sqrt{\frac{3\cdot\sqrt[5]{3^5}}{2^3\cdot\sqrt{2^6}}}=\sqrt{\frac{3\cdot 3^{5/5}}{2^3\cdot 2^{6/2}}}=\sqrt{\frac{3\cdot 3}{2^3\cdot 2^3}}=\sqrt{\frac{3^2}{2^6}}=\frac{3^{2/2}}{2^{6/2}}=\frac{3}{2^3}$