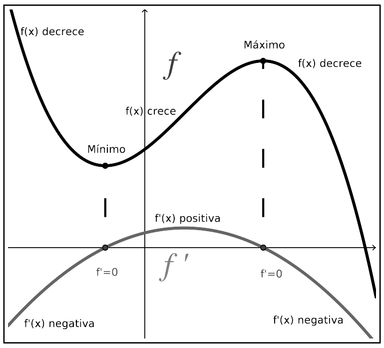
Derivadas de funciones



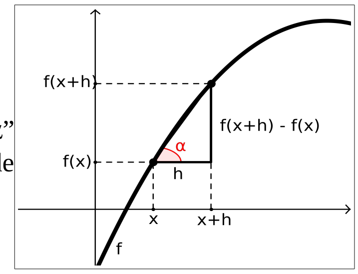
Concepto: Dada una función continua ***f*(*x*)** , su **derivada** es otra función ***f* '(*x*)** que indica cómo se comporta la gráfica de la primera, estudiando la variación de la altura "y" con respecto al avance de la "x":

- si ***f*(*x*) crece** (su gráfica sube de izquierda a derecha), ***f* ' (*x*) es positiva** (su gráfica está sobre el eje X) y es mayor cuanto más fuerte sea la inclinación de la gráfica de *f* .
- si ***f*(*x*) decrece** (su gráfica baja), ***f* '(*x*) es negativa** (su gráfica está bajo el eje X) y muy negativa si la gráfica de *f*(*x*) está muy inclinada hacia abajo.
- si ***f*(*x*)** se mantiene **constante** o **alcanza un máximo o un mínimo relativo**, ***f* '(*x*) es 0** (su gráfica se mantiene en el eje X o lo corta).

Como el crecimiento es puntual (una función puede crecer en unos puntos y decrecer en otros) y relativo (crece o decrece con relación a los puntos que tiene cerca), la definición se hace punto a punto y con ayuda del límite:

Definición: La derivada de *f* en el punto *x* es

$$\boxed{f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$



Geométricamente, esta expresión es equivalente a la tangente trigonométrica del ángulo "α" que parece formar la gráfica de *f*(*x*) con la horizontal en el punto de abscisa "*x*", de coordenadas P = (*x* , *f*(*x*)). La tangente mide la inclinación desde 0 (0º) hasta $\pm\infty$ ($\pm$90º).

Definición: Una función es derivable en un intervalo si lo es en cada uno de sus puntos.

Aunque el uso de la definición es relativamente complicado, sólo es necesario para hallar la derivada de algunas funciones características: las que aparecen en la siguiente **"Tabla de derivadas"**.

Nombre	Función	Función derivada	Ejemplos
Constante	$f(x)=k \quad k\in\mathbb{R}$	$f'(x)=0$	$f(x)=5 \rightarrow f'(x)=0$
Identidad	$f(x)=x$	$f'(x)=1$	$y=x \rightarrow y'=1$
Potencial	$f(x)=x^n$	$f'(x)=n\cdot x^{(n-1)}$	$f(x)=x^4 \rightarrow f'(x)=4x^3$
	Sirve también para potencias negativas		$f(x)=\frac{1}{x^3}=x^{-3}\rightarrow f'(x)=-3\cdot x^{-4}=\frac{-3}{x^4}$
	Y fraccionarias		$f(x)=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}\rightarrow f'(x)=\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{2}{3}-1}=\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{-1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$
Proporción inversa	$f(x)=\frac{1}{x}$	$f'(x)=\frac{-1}{x^2}$	
Raíz cuadrada	$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	
Exponencial	Base "e" $f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$	
	Otras bases $f(x)=a^x$	$f'(x)=a^x\cdot\ln a$	$f(x)=2^x\rightarrow f'(x)=2^x\cdot\ln 2 \approx 0{,}6931\cdot 2^x$
Logarítmica	Neperiano $f(x)=\ln x$	$f'(x)=\frac{1}{x}$	
	Otras bases $f(x)=\log_b(x)$	$f'(x)=\frac{\log_b e}{x}$	$f(x)=\log(x)\rightarrow f'(x)=\frac{\log e}{x}\approx\frac{0{,}4343}{x}$ (base 10)
Trigonométricas (x en radianes)	Seno $f(x)=\text{sen}(x)$	$f'(x)=\cos(x)$	
	Coseno $f(x)=\cos(x)$	$f'(x)=-\text{sen}(x)$	

Merece la pena aprendérselas de memoria, porque todas las demás funciones se obtienen combinando éstas mediante operaciones, y sus derivadas se obtienen teniendo en cuenta las siguientes

Propiedades:

1. $(k\cdot f(x))'=k\cdot f'(x)$ $\quad \left(\frac{f(x)}{k}\right)'=\frac{f'(x)}{k}$
2. $(f\pm g)'(x)=f'(x)\pm g'(x)$
3. $(f\cdot g)'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
4. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
5. Regla de la cadena

$$(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

Ejercicios y problemas típicos:

1. **<u>Cálculo de derivadas. Comprobación de la derivabilidad de una función</u>**: Si la función está dada por una <u>fórmula única</u>, no hay más que <u>aplicar las propiedades</u> (con cuidado, especialmente en el caso de la regla de la cadena) y la tabla de derivadas. Sólo se utiliza la definición, calculando el límite que esta implica, si lo exigen en el enunciado.
   Si la función está <u>definida a trozos</u> (con varias fórmulas, o con valor absoluto) primero hay que comprobar que es continua, porque en caso contrario <u>no existe la derivada en los puntos de discontinuidad</u>. Luego se calcula la derivada de cada trozo, y <u>se comprueba que la derivada por la izquierda es igual a la derivada por la derecha</u> en los puntos en que cambian las fórmulas (si son distintas, la derivada no existe, y los puntos se denominan “angulosos” porque en ellos la gráfica forma un ángulo). Calculada $f'(x)$, se puede calcular $f''(x)$, $f'''(x)$ y las derivadas sucesivas, solo si lo piden.
2. **<u>Tasa de variación media y tasa de variación instantánea</u>**: La tasa de variación media de una función $f(x)$ <u>entre dos puntos *a* y *b*</u> (o en el intervalo $[a, b]$) es $\boxed{TVM_{a,b}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$ es decir, un valor numérico que corresponde a la variación de la coordenada “*y*” entre la variación de la coordenada “*x*” en ese intervalo. Equivale a la velocidad media de cambio de “*y*” con respecto a “*x*” entre los puntos *a* y *b*.
   La tasa de variación instantánea <u>en un punto “*a*”</u> es la derivada de $f(x)$ en ese punto. <u>Primero se calcula la derivada</u> $f'(x)$ y <u>luego se sustituye</u> la *x* <u>por *a*</u> para obtener $\boxed{TVI_a=f'(a)}$. Equivale a la velocidad de cambio en el instante $x = a$.
3. **<u>Cálculo de la recta tangente</u>**: La tangente a una curva $y = f(x)$ en un punto de abscisa $x = a$, es una recta $y = mx + b$ que pasa por el punto $P = (a, f(a))$ con pendiente $m = f'(a)$.
   Si conocemos la función $f(x)$ y el valor de *a*, sólo hay que calcular $f'(x)$ y sustituir *x* por *a* en f y en f' para obtener $f(a)$ y $f'(a)$. Así se puede escribir $\boxed{y=f'(a)(x-a)+f(a)}$ (donde *x* e *y* son las variables de la ecuación de la recta tangente, que no se tienen que calcular, y el resto son números).
   En algunos problemas no se conoce el valor de “*a*”, por lo que habrá que hallarlo usando las dos condiciones anteriores: que la tangente pasa por P, y que su pendiente es la derivada de la función en “*a*”.
4. **<u>Cálculo de máximos y mínimos</u>**: En la mayoría de los casos el problema está en <u>definir una función con una sola variable</u>, que corresponda a la cantidad que queremos maximizar (o minimizar).
   Una vez que tenemos la función $f(x)$ sólo hay que <u>calcular la derivada</u> $f'(x)$, <u>igualarla a 0</u> y <u>resolver la ecuación resultante</u>. Las soluciones son los máximos y mínimos relativos, que se diferencian bien estudiando el cambio de signo de la derivada (si pasa de + a – es un máximo, si de – a + un mínimo) o bien calculando la derivada segunda de la función y sustituyéndola por esos puntos (si el resultado es – el punto es un máximo, y si es + un mínimo).
   En resumen, $$\boxed{\begin{cases} a \text{ es un máximo si } f'(a)=0 \text{ y } f''(a)<0 \quad (\text{o } f' \text{ pasa de + a } -) \\ a \text{ es un mínimo si } f'(a)=0 \text{ y } f''(a)>0 \quad (\text{o } f' \text{ pasa de } - \text{ a +}) \end{cases}}$$
   Observación: los puntos en los que no hay derivada (por ser extremos de los intervalos, puntos de discontinuidad o angulosos) se estudian aparte, fijándose en la gráfica o en el signo de la derivada (que indica el crecimiento).
5. **<u>Esbozo de gráficas de funciones</u>**: En general, se obtiene una gráfica aproximada sin más que estudiar el dominio de la función, la continuidad, las asíntotas, y el crecimiento con los máximos y mínimos relativos.
   Para esto último 1º) se deriva, 2º) se iguala a 0 la derivada, 3º) se resuelve la ecuación para obtener los puntos en que la derivada es 0, y 4º) se dan valores en los intervalos entre estos puntos y los de discontinuidad ((o angulosos)). Si el resultado es +, la gráfica de $f(x)$ crece en ese intervalo, y si es –, decrece.
   $$\boxed{\begin{array}{c} \begin{cases} \text{Si } f'(x)<0 \to f(x) \text{ decrece } \ddots \\ \text{Si } f'(x)>0 \to f(x) \text{ crece } .\cdot^{\cdot} \end{cases} \\ \text{Si } f'(x)=0 \to \text{máximo o mínimo (siempre que } f''(x)\neq 0) \end{array}}$$
   Si es sencillo, se puede estudiar la derivada segunda para calcular la curvatura y los puntos de inflexión con el mismo procedimiento, teniendo en cuenta que: 1º) si en un intervalo la derivada segunda es +, la gráfica es convexa (con forma de U), 2º) si es –, cóncava (con forma de ∩) y 3º) si es 0 y cambia de signo, punto de inflexión.
   $$\boxed{\begin{array}{c} \begin{cases} \text{Si } f''(x)>0 \to f(x) \text{ es convexa } \cup \\ \text{Si } f''(x)<0 \to f(x) \text{ es cóncava } \cap \end{cases} \\ \text{Si } f''(x)=0 \to \text{punto de inflexión (siempre que } f'''(x)\neq 0) \end{array}}$$
6. **<u>Límites tipo 0/0 o ∞/∞</u>**: Si la función es continua y derivable en un intervalo alrededor del punto en el que buscamos el límite, y numerador y denominador sólo se anulan o se hacen ∞ en ese punto, cumple las condiciones del “teorema de L’Hôpital”. Por tanto podemos calcular el límite derivando numerador y denominador <u>por separado</u> (¡no hay que usar la derivada de la división!), lo que normalmente hace más fácil el cálculo del límite. La regla de L’Hôpital se puede usar varias veces en el mismo cálculo, simplificando cada vez más la función. También vale para los límites cuando $x \to \infty$.
   $$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}} \qquad \boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}} \qquad \text{Solo en los casos } \frac{0}{0} \text{ o } \pm\frac{\infty}{\infty}$$